مؤسسه فرهنگی آموزشی آیین علوی

پاسخنامه آزمون اختصاصی
علوم ریاضی پا(پایه دوازدهم)

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۸/۲۷

آغاز: ۸:۳۰ پایان: ۱۰:۴۰

نام: نام خانوادگی: شماره دانش‌آموزی:

تعداد سؤال: ۶۵ | مدت پاسخگویی: ۱۳۰ دقیقه

ردیف	عنوان	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	هندسه	۱۰ سؤال	۱	۱۰	۲۰ دقیقه
۲	گسسته	۱۰ سؤال	۱۱	۲۰	۲۰ دقیقه
۳	حسابان	۱۵ سؤال	۲۱	۳۵	۳۰ دقیقه
۴	فیزیک	۱۵ سؤال	۳۶	۵۰	۳۰ دقیقه
۵	شیمی	۱۵ سؤال	۵۱	۶۵	۳۰ دقیقه

اساتید: هندسه، گسسته و حسابان (استاد مرادخانی)، فیزیک (استاد اختری)، شیمی (استاد شهریاری)

ناظر علمی: استاد حسن شهریاری و مهندس علیرضا آسمانی

طراحی: آقایان صادق زارع، حسن شهریاری

@Ayin_alavi t.me/Alavi_Ins

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات حتی با ذکر منبع به هر روش (چاپی، الکترونیکی و ...) ممنوع است.

۱. اگر $A=\begin{bmatrix}-۴ & -۱۴\\ ۲ & ۷\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب یک دستگاه به‌صورت $AX=B$ باشد، به‌ازای Bهای مختلف، جواب‌های دستگاه به چه صورتی است؟

(۱) همواره یک جواب
(۲) همواره فاقد جواب
(۳) همواره بی‌شمار جواب
(۴) در صورتی که جواب داشته باشد، تعداد جواب‌ها بی‌شمار خواهد بود.

پاسخ: گزینه ۴ طبق فرض داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-۴ & -۱۴\\ ۲ & ۷\end{bmatrix}\rightarrow |A|=۰$$

چون $|A|=۰$ پس دستگاه یا جواب ندارد و یا اگر جواب داشته باشد، تعداد جواب‌ها بی‌شمار خواهد بود.

۲. ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه A و B طوری مفروض‌اند که $|A|=۳$ و $|A+B|=۶$؛ حاصل $\left|I+A^{-۱}B\right|$ کدام است؟

(۱) ۳
(۲) ۲
(۳) $\frac{۱}{۲}$
(۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ از آنجا که $I=A^{-۱}A$، ماتریس موردنظر را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\left|I+A^{-۱}B\right|=\left|A^{-۱}A+A^{-۱}B\right|=\left|A^{-۱}(A+B)\right|$$

$$=\left|A^{-۱}\right||A+B|=\frac{۱}{|A|}|A+B|=\frac{۱}{۳}\times ۶=۲$$

۳. اگر $A=\begin{bmatrix}|A^{۲}| & ۳\\ |A| & ۴|A|\end{bmatrix}$ آنگاه مجموعهٔ مقادیر $|A|$ کدام است؟

(۱) $\{۱,-۱\}$
(۲) $\{۰,۱,-۱\}$
(۳) $\{۰,۱,۲\}$
(۴) $\{۰,۲\}$

پاسخ: گزینه ۲ ماتریس دترمینان A را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}|A^{۲}| & ۳\\ |A| & ۴|A|\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{دترمینان می‌گیریم.}]{\text{از طرفین}}|A|=\begin{vmatrix}|A|^{۲} & ۳\\ |A| & ۴|A|\end{vmatrix}\rightarrow |A|=۴|A|^{۳}-۳|A|\rightarrow ۴|A|^{۳}-۴|A|=۰\rightarrow ۴|A|\left(|A|^{۲}-۱\right)=۰\rightarrow\begin{cases}|A|=۰\\ |A|=۱\\ |A|=-۱\end{cases}$$

۴. اگر A ماتریس مربعی بوده و $A^{۲}=A$، آنگاه حاصل $(I-A)^{۱۰۰}$ کدام است؟

(۱) $I+A$
(۲) $I+۱۰۰A$
(۳) $I-A$
(۴) $I-۱۰۰A$

پاسخ: گزینه ۳ حاصل $(I-A)^{۲}$ را با توجه به رابطهٔ $A^{۲}=A$ به دست می‌آوریم:

$$(I-A)^{۲}=I^{۲}+A^{۲}-۲AI=I+A-۲A=I-A$$

دیده می‌شود $(I-A)^{۲}=I-A$ پس $(I-A)^{۱۰۰}$ نیز برابر $I-A$ است.

۵. اگر $|A|_{۲\times ۲}=۳$ و $|B|_{۳\times ۳}=۲$ حاصل $||۳B|A|$ کدام است؟

(۱) $۲^{۶}\times ۳$
(۲) $۲^{۲}\times ۳^{۷}$
(۳) $۲^{۴}\times ۳^{۵}$
(۴) $۲^{۳}\times ۳^{۴}$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم اگر ماتریس مربعی A از مرتبه n باشد آنگاه $|kA|=k^{n}|A|$، پس طبق فرض داریم:

$$||۳B|A|=|۳^{۳}|B|A|=(۳^{۳})^{۲}|B|^{۲}|A|=۳^{۶}\times ۲^{۲}\times ۳=۳^{۷}\times ۲^{۲}$$

۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۱\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ باشد آنگاه $A^{۱۰۰}+A^{۹۹}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۱\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$
(۲) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$
(۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳ با یافتن ماتریس $A^{۲}$، قانونی برای توان‌های ماتریس A می‌یابیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۱\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۱\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$A^{۲}=I\Rightarrow\begin{cases}A^{۲k+۱}=A\\ A^{۲k}=I\end{cases}$$

$$A^{100}+A^{99}=I+A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

۷. اگر $\begin{vmatrix}3&4&a\\-1&2&b\\m&n&7\end{vmatrix}=k$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix}3&4&a\\-1&2&b\\m&n&5\end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

(۱) $k+4$ (۲) $k-4$ (۳) $k+20$ (۴) $k-20$

پاسخ: گزینه ۴ دترمینان فرض را با دترمینان حکم مقایسه می‌کنیم؛ برای این منظور، دترمینان‌ها را برحسب سطر سوم بسط می‌دهیم:

$$\text{فرض}: \begin{vmatrix}3&4&a\\-1&2&b\\m&n&7\end{vmatrix}=k\Rightarrow m\begin{vmatrix}4&a\\2&b\end{vmatrix}-n\begin{vmatrix}3&a\\-1&b\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}3&4\\-1&2\end{vmatrix}=k$$

$$\text{حکم}: \begin{vmatrix}3&4&a\\-1&2&b\\m&n&5\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}4&a\\2&b\end{vmatrix}-n\begin{vmatrix}3&a\\-1&b\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}3&4\\-1&2\end{vmatrix}\xrightarrow{5=7-2}\underbrace{m\begin{vmatrix}4&a\\2&b\end{vmatrix}-n\begin{vmatrix}3&a\\-1&b\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}3&4\\-1&2\end{vmatrix}}_{k}-2\begin{vmatrix}3&4\\-1&2\end{vmatrix}=k-2(6+4)=k-20$$

۸. اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه ۲ باشد به‌طوری که $A^2=A+I$ و $A^8=mA+nI$، آنگاه حاصل $m-n$ کدام است؟

(۱) -8 (۲) -4 (۳) ۴ (۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴ توسط اتحادهای جبری، ماتریس A^8 را از روی ماتریس A^2 به دست می‌آوریم:

$$A^2=A+I\xrightarrow{\text{به توان ۲}}A^4=(A+I)^2=A^2+2A+I\Rightarrow A^4=(A+I)+2A+I=3A+2I\xrightarrow{\text{به توان ۲}}A^8=(3A+2I)^2=9A^2+12A+4I$$

$$=9(A+I)+12A+4I\Rightarrow A^8=21A+13I\Rightarrow\begin{cases}m=21\\n=13\end{cases}\Rightarrow m-n=8$$

۹. اگر $A^2+5A+2I=\bar{O}$ باشد A^{-1} کدام است؟

(۱) $(A+5I)$ (۲) $\frac{1}{2}(A+5I)$ (۳) $-\frac{1}{2}(A+5I)$ (۴) $-(A+5I)$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$A^2+5A+2I=\bar{O}\Rightarrow A(A+5I)=-2I$$

$$\to\frac{A(A+5I)}{-2}=I\to A^{-1}=\frac{-1}{2}(A+5I)$$

۱۰. به‌ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات $\begin{cases}2ax+y=-3\\6x+(a+2)y=3\end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۱ (۳) -3 (۴) هیچ مقدار

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases}2ax+y=-3\\6x+(a+2)y=3\end{cases}$$

شرط وجود بی‌شمار جواب: $\frac{2a}{6}=\frac{1}{a+2}=\frac{-3}{3}\to a=-3$

۱۱. اگر n عدد صحیح و $d=(n^2-4n,5n+6)$ عددی اول باشد، آنگاه بزرگ‌ترین مقدار d کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۴

$$(n^2-4n,5n+6)=d$$

$$\left.\begin{matrix}d|n^2-4n\xrightarrow{\times5}d|5n^2-20n\\d|5n+6\xrightarrow{\times n}d|5n^2+6n\end{matrix}\right\}\xrightarrow{-}d|26n$$

$$\left.\begin{matrix}d|26n\xrightarrow{\times5}d|26\times5n\\\text{داشتیم}: d|5n+6\xrightarrow{\times26}d|5\times26n+156\end{matrix}\right\}\xrightarrow{-}d|156=2^2\times3\times13$$

در بین مقسوم‌علیه‌های طبیعی d، ۱۳ بزرگترین مقدار اول می‌باشد.

۱۲. اگر a مضرب ۳ بوده ولی مضرب ۶ نباشد، آنگاه باقیماندهٔ $a^۲$ بر ۴ برابر کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ هر عدد طبیعی به یکی از ۶ فرم ، $۶k$ ، $۶k \pm ۱$ ، $۶k \pm ۲$ ، $۶k + ۳$ است از این بین اعداد به فرم $۶k + ۳$ مضرب ۳ هستند ولی بر ۶ بخش‌پذیر نیستند بنابراین a به صورت $۶k + ۳$ است؛ می‌توان نوشت:

$$a^۲ = ۳۶k^۲ + ۳۶k + ۹ = ۴\underbrace{(۹k^۲ + ۹k + ۲)}_{q} + ۱ = ۴q + ۱$$

بنابراین باقیماندهٔ تقسیم $a^۲$ بر ۴ برابر ۱ است.

۱۳. کدام عدد مثال نقضی برای جملهٔ «اگر $۴p + ۱$ اول باشد، p نیز اول است» می‌باشد؟

(۱) ۱۳ (۲) ۱۷ (۳) ۲۹ (۴) ۴۵

پاسخ: گزینه ۲ مقادیری که از گزینه‌ها داده شده است، درواقع هریک برابر $۴p + ۱$ است. برای هر گزینه p را می‌یابیم:

گزینهٔ ۱: $۴p + ۱ = ۱۳ \Rightarrow p = ۳$

گزینهٔ ۲: $۴p + ۱ = ۱۷ \Rightarrow p = ۴$

گزینهٔ ۳: $۴p + ۱ = ۲۹ \Rightarrow p = ۷$

گزینهٔ ۴: $۴p + ۱ = ۴۵ \Rightarrow p = ۱۱$

مثال نقض مناسب جملهٔ «اگر $۴p + ۱$ اول باشد، p نیز اول است.» باید دو ویژگی را به‌طور هم‌زمان داشته باشد:

۱) به‌ازای آن، $۴p + ۱$ اول باشد.

۲) به‌ازای آن، p اول نباشد.

بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ ۲ این ویژگی را دارد.

۱۴. در یک تقسیم باقیمانده برابر ۲۷ و خارج‌قسمت برابر ۱۳ می‌باشد، حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد بدون آنکه مقسوم و خارج‌قسمت تغییر نمایند؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱ قضیهٔ تقسیم را به‌صورت $a = ۱۳b + ۲۷$ و مقدار اضافه شده به مقسوم‌علیه را x در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$a = ۱۳b + ۲۷ \Rightarrow a = (b + x) \times ۱۳ + ۲۷ - ۱۳x$$

$$r < b \Rightarrow ۲۷ - ۱۳x \geq ۰ \Rightarrow x \leq \frac{۲۷}{۱۳} \xrightarrow{x \in N} max(x) = ۲$$

۱۵. اگر باقی‌ماندهٔ a در تقسیم به ۱۵ برابر ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ $۳a - ۸۳$ در تقسیم به ۹ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱

$$a \left| \begin{matrix} ۱۵ \\ \hline ۷ \end{matrix} \right. q \Rightarrow a = ۱۵q + ۷ \xrightarrow{\times ۳} ۳a = ۴۵q + ۲۱ \xrightarrow{-۸۳} ۳a - ۸۳ = \underbrace{۴۵q}_{\text{بر ۹ بخش‌پذیر}} - ۶۲$$

حال باید باقی‌ماندهٔ -۶۲ را بر ۹ به‌دست آوریم:

$$-۶۲ \left| \begin{matrix} ۹ \\ \hline ۸ \end{matrix} \right. -۷ \Rightarrow r = ۹ - ۸ = ۱$$

۱۶. اگر p عددی اول باشد به‌طوری که $۴x^۲ = p + ۹$، چند مقدار متمایز برای p وجود دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش‌تر از ۲

پاسخ: گزینه ۲ با کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$۴x^۲ = p + ۹ \Rightarrow ۴x^۲ - ۹ = p \Rightarrow (۲x - ۳)(۲x + ۳) = p \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۳ = ۱ \\ ۲x + ۳ = p \end{cases} \Rightarrow p = ۷$$

p جواب قابل قبول ندارد $\Rightarrow$ یا $\begin{cases} ۲x-۳=p \\ ۲x+۳=۱ \end{cases}$

۱۷. در یک تقسیم باقی‌مانده برابر ۲۳ و خارج‌قسمت برابر ۸ است. حداکثر چند واحد به مقسوم‌علیه می‌توان اضافه کرد تا خارج‌قسمت تغییر نکند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ روش ۱: در یک تقسیم باقی‌مانده برابر ۲۳ و خارج‌قسمت برابر ۸ است. این جمله یعنی $a=b\times ۸+۲۳$. می‌خواهیم ببینیم حداکثر چند واحد می‌توانیم به مقسوم‌علیه اضافه کنیم تا خارج‌قسمت تغییر نکند. این مقدار را x در نظر می‌گیریم. برای به‌دست آوردن x به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a=b\times ۸+۲۳=(b+x)\times ۸+\underbrace{۲۳-۸x}_{r'}$$

در این حالت x واحد به مقسوم‌علیه اضافه شده است، خارج‌قسمت تغییری نکرده است، ولی باقی‌مانده به $r'=۲۳-۸x$ تغییر یافته است. می‌دانیم باقی‌مانده باید در هر تقسیم، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس $r'\geq ۰$. داریم:

$$r'\geq ۰\Rightarrow ۲۳-۸x\geq ۰\Rightarrow x\geq ۲/۸\Rightarrow max(x)=۲$$

روش ۲: از یک راه دیگر هم می‌توانستیم به جواب مسئله برسیم:

$$a=b\times ۸+۲۳ \quad \boxed{I}$$
$$a=(b+x)\times ۸+r \quad \boxed{II}$$

حالا مقدار $\boxed{I}-\boxed{II}$ را به دست می‌آوریم: $x+r-۲۳=۰\Rightarrow x=\frac{۲۳-r}{۸}$ بیشترین x وقتی به‌دست می‌آید که $۲۳-r$ بزرگ‌ترین مقدار خود را داشته باشد و این هنگامی است که r کمترین مقدار خود را داشته باشد. با امتحان کردن چند عدد، بیشترین مقدار x باز هم ۲ می‌شود!

۱۸. اگر x,y و z اعدادی صحیح باشند به‌طوری که $z|x$ و $z|y$، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $z^۲|x-y$ (۲) $x|۳x+y^۴$ (۳) $x^۴|xy^۳$ (۴) $x|y(۱+x)$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۲»:

$$\left.\begin{matrix} z|y\xrightarrow{\times y^۳} z|y^۴ \\ z|x\xrightarrow{\times ۳} z|۳x \end{matrix}\right\}\xrightarrow{+} z|۳x+y^۴$$

گزینهٔ «۳»:

$$\left.\begin{matrix} z|y\to z^۳|y^۳ \\ z|x \end{matrix}\right\}\xrightarrow{\times} z^۴|xy^۳$$

گزینهٔ «۴»

$$\left.\begin{matrix} z|y \\ z|x\xrightarrow{\times y} z|xy \end{matrix}\right\}\xrightarrow{+} z|y+xy\Rightarrow z|y(۱+x)$$

گزینهٔ «۱»: اگر $z=۳$ و $y=۶$ آنگاه $x=۱۸, ۱۸|۳, ۳|۶$ اما $۱۲\not| ۹$.

۱۹. اگر x و y اعداد فرد طبیعی باشند بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک تمام اعداد به‌صورت $۳x^۲+۵y^۲$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۲

$$۳(۸k+۱)+۵(۸q+۱)=۲۴k+۴۰q+۸=۸\underbrace{(۳k+۵q+۱)}_{t}=۸t$$

به ازای $x=۱$ و $y=۱$، عدد ۸ تولید شده و ب.م.م نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۸ باشد.

۲۰. باقیمانده تقسیم a بر ۷، از باقیمانده تقسیم $(-a)$ بر ۷ سه واحد بیشتر است. رقم یکان کوچکترین عدد سه رقمی a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

$$a=۷q+r\xrightarrow{\times(-۱)}-a=-۷q-r\Rightarrow -a=-۷q-r+۷-۷\Rightarrow -a=۷(-q-۱)+\underbrace{۷-r}_{r'}$$

$$r=r'+۳\Rightarrow r=۷-r+۳$$

$$\Rightarrow ۲r=۱۰\Rightarrow r=۵\Rightarrow a=۷q+۵\xrightarrow{q=۱۴} a_{min}=۱۰۳\Rightarrow \text{رقم یکان}=۳$$

۲۱. اگر f تابعی نزولی باشد به طوری که $(fof)(x)=۴x+۳$، مقدار $f(-\frac{۵}{۲})$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۱٫۵ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ تابع $f(x)=ax+b$ که علامت a منفی است فرض می‌کنیم. داریم:

$$(fof)(x)=a(ax+b)+b=a^{۲}x+ab+b=۴x+۳$$
$$\Rightarrow (a^{۲}=۴\ ,\ ab+b=۳)\Rightarrow a=-۲, b=-۳$$
$$\Rightarrow f(x)=-۲x-۳\Rightarrow f(-\frac{۵}{۲})=۵-۳=۲$$

۲۲. تابع $f(x)=ax+۳$ با وارونش بیش از یک نقطهٔ تقاطع دارند، حاصل $f^{-۱}(-۴)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) -۱ ۴) -۷

پاسخ: گزینه ۲ وارون تابع f را می‌یابیم:

$$f(x)=ax+۳\Rightarrow y=ax+۳\Rightarrow ax=y-۳\Rightarrow x=\frac{۱}{a}y-\frac{۳}{a}\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=\frac{۱}{a}x-\frac{۳}{a}$$

توابع f و $f^{-۱}$ هر دو خطی هستند و چون در بیش از یک نقطه متقاطع هستند، پس بر هم منطبق‌اند، یعنی داریم:

$$f^{-۱}(x)=f(x)\Rightarrow \frac{۱}{a}x-\frac{۳}{a}=ax+۳\Rightarrow \begin{cases}\frac{۱}{a}=a\Rightarrow a^{۲}=۱\Rightarrow a=\pm ۱\\ -\frac{۳}{a}=۳\Rightarrow a=-۱\end{cases}\Rightarrow a=-۱$$

تابع $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است:

$$f^{-۱}(x)=-x+۳\Rightarrow f^{-۱}(-۴)=-(-۴)+۳=۷$$

۲۳. اگر تابع $f=\{(۳\ ,۵)\ ,(\sqrt{۱۰}\ ,۴)\ ,(۴\ ,a)\ ,(۵\ ,-a+۴)\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $۴<a<۵$ ۲) $۲<a<۴$ ۳) $۲<a<۵$ ۴) $-۲<a<۴$

پاسخ: گزینه ۲ با مرتب کردن xها از کوچک به بزرگ داریم:

$$۳<\sqrt{۱۰}<۴<۵\xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} f(۳)>f(\sqrt{۱۰})>f(۴)>f(۵)$$

$$\Rightarrow ۵>۴>a>-a+۴\Rightarrow \begin{cases}a<۴\\ a>-a+۴\Rightarrow ۲a>۴\Rightarrow a>۲\end{cases}\Rightarrow ۲<a<۴$$

۲۴. چند عدد صحیح در برد تابع $f(x)=\sqrt{[x]+[-x]}+\cos \pi x$ قرار دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم: $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

دامنه‌ی تابع را تعیین می‌کنیم:

$$[x]+[-x]\geq ۰\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\Rightarrow D_f=\mathbb{Z}$$
$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow \cos \pi x=(-۱)^x=\begin{cases}۱ & x\ \text{زوج}\\ -۱ & x\ \text{فرد}\end{cases}$$
$$R_f=\{۱,-۱\}$$

۲۵. اگر نمودار تابع $f(x)=-\frac{۱}{۴}x^{۳}+ax+b$ در نقطهٔ $(۱,-\frac{۳}{۲})$ نمودار تابع وارونش را قطع کند، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینه ۲ نقطهٔ $(۱,-\frac{۳}{۲})$ متعلق به نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ است. پس:

$$f(۱)=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۴}+a+b=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a+b=-\frac{۵}{۴}$$

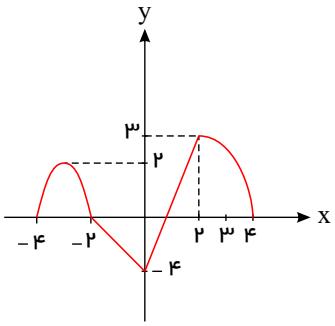
$$f^{-۱}(۱)=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(-\frac{۳}{۲})=۱\Rightarrow \frac{۲۷}{۳۲}-\frac{۳a}{۲}+b=۱\Rightarrow -۳a+۲b=\frac{۵}{۱۶}$$

بنابراین باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}a+b=-\frac{۵}{۴}\\ -۳a+۲b=\frac{۵}{۱۶}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}۳a+۳b=-\frac{۱۵}{۴}\\ -۳a+۲b=\frac{۵}{۱۶}\end{cases}\Rightarrow ۵b=-\frac{۵۵}{۱۶}\Rightarrow b=-\frac{۱۱}{۱۶}\Rightarrow a=-\frac{۹}{۱۶}$$

بنابراین $a-b=\frac{۱}{۸}$.

۲۶. شکل زیر نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲}+۳)-۲$ می‌باشد. دامنهٔ تابع f کدام است؟



۱) $[-۱۴, ۲]$
۲) $[-۴, ۴]$
۳) $[۱, ۵]$
۴) $[۰, ۱۴]$

پاسخ: گزینه ۳ دقت کنید که در گفتن دامنه توابع، محدوده متغیر x به عنوان دامنه پذیرفته می‌شود نه محدودهٔ عبارت داخل پرانتز. پس داریم:

$$-۴\le x\le ۴\Rightarrow -۲\le \frac{x}{۲}\le ۲\Rightarrow ۱\le \frac{x}{۲}+۳\le ۵$$

پس ورودی تابع f می‌تواند در محدوده $[۱, ۵]$ باشد، این محدوده همان دامنهٔ تابع f است.

۲۷. دامنه تابع $y=\sqrt{\frac{x}{۶}+۴-|x|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ریشه‌ی داخل قدرمطلق را بدست می‌آوریم: $x=۰$

$$x\ge ۰\Rightarrow \frac{x}{۶}+۴-x\ge ۰\Rightarrow x+۲۴-۶x\ge ۰\Rightarrow ۵x\le ۲۴\Rightarrow x\le \frac{۲۴}{۵}\quad (۱)\xrightarrow{x\ge ۰} ۰\le x\le \frac{۲۴}{۵}$$

$$x<۰\Rightarrow \frac{x}{۶}+۴+x\ge ۰\Rightarrow x+۶x\ge -۲۴\Rightarrow x\ge \frac{-۲۴}{۷}\xrightarrow{x<۰} -\frac{۲۴}{۷}\le x<۰\quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cup(۲)} D_y=[-\frac{۲۴}{۷},\frac{۲۴}{۵}]$$

این بازه شامل اعداد صحیح $\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$ می‌باشد.

۲۸. تابع وارون تابع $f(x)=\frac{x+۱}{۲x-۳}$ با خط $y=-\frac{۱}{۲}x$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ تابع وارون f به‌صورت زیر است.

$$f(x)=\frac{x+۱}{۲x-۳}=y\Rightarrow x+۱=۲xy-۳y\Rightarrow ۱+۳y=۲xy-x=x(۲y-۱)\Rightarrow x=\frac{۱+۳y}{۲y-۱}\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=\frac{۱+۳x}{۲x-۱}$$

حال $f^{-۱}$ را با خط $y=-\frac{۱}{۲}x$ قطع می‌دهیم.

$$\frac{۱+۳x}{۲x-۱}=\frac{x}{-۲}\Rightarrow ۲x^۲-x=-۲-۶x\Rightarrow ۲x^۲+۵x+۲=۰$$

$$\Delta=۲۵-۴\times ۲\times ۲=۹>۰\Rightarrow x=\frac{-۵\pm ۳}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x=-۲\\ x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)$ و خط $y=-\frac{۱}{۲}x$ در دو نقطه متقاطع هستند.

روش دوم: روش ساده‌تر این است که نمودار f را با خط $y=-۲x$ قطع دهیم.

۲۹. اگر $f(x)=x^۳-۳x$ باشد، دامنه تابع $y=\sqrt{x-f(x)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۲]\cup[۰,۲]$ ۲) $[-۲,۰]\cup[۲,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-۲]$ ۴) $[۰,۲]$

پاسخ: گزینه ۱

تابع $\sqrt{x-f(x)}=\sqrt{۴x-x^۳}$ وقتی با معنی است که $۴x-x^۳\ge ۰$ باشد: $۴x-x^۳=x(۴-x^۲)\ge ۰$

پس $۰\le x\le ۲$ یا $-\infty\le x\le -۲$ است: دامنه تابع به صورت $(-\infty,-۲]\cup[۰,۲]$ است.

x		−۲		۰		۲	
$۴x-x^۳\ge ۰$	+	۰	−	۰	+	۰	−
		ج			ج		

۳۰. اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ ، $g(x)=\sqrt{a-x}+b$ ، $D_{f+g}=[1,6]$ و $(f+g)(2)=5$ باشد، حاصل $2a-b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۳ دامنهٔ توابع f و g به‌صورت زیر است:

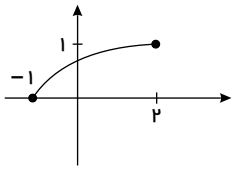
$$x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow D_f=[1,+\infty)$$

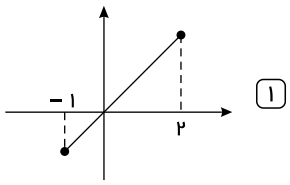
$$a-x\geq 0 \Rightarrow x\leq a \Rightarrow D_g=(-\infty,a]$$

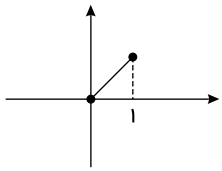
چون $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[1,6]$ می‌باشد، پس می‌توان نتیجه گرفت که $a=6$.
هم‌چنین داریم:

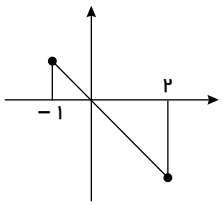
$$(f+g)(2)=f(2)+g(2)=\sqrt{2-1}+\sqrt{6-2}+b=5 \Rightarrow 1+2+b=5 \Rightarrow b=2$$
$$\Rightarrow 2a-b=2(6)-2=10$$

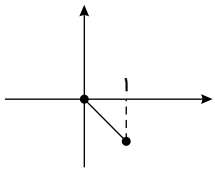
۳۱. نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=(fof^{-1})(x)$ کدام است؟



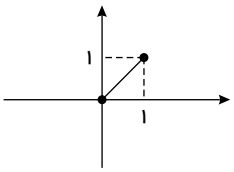
۱) 

۲) 

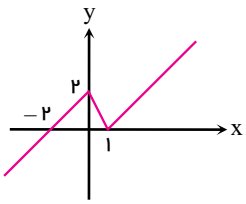
۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۲ توجه کنید که $D_g=R_f=[0,1]$ و $g(x)=(fof^{-1})(x)=x$، پس نمودار تابع g به‌صورت زیر است.



۳۲. نمودار تابع f به صورت مقابل است. معادلهٔ $(fof)(x)=0$ چند جواب دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴ دقت کنید که تابع f فقط به ازای -2 و ۱ صفر می‌شود؛ پس اگر $(fof)(x)=0$، باید $f(x)=-2$ یا $f(x)=1$. اما دقت کنید که خط $y=-2$ نمودار f را در یک نقطه و خط $y=1$ آن را در سه نقطهٔ دیگر قطع می‌کند؛ پس معادله چهار جواب دارد.

۳۳. نقطهٔ $A(-1,1)$ اکسترمم نسبی تابع $y=x^3|x|+3ax^2+b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ در همسایگی $x=-1$ مقدار x منفی است و تابع را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y=x^2|x|+3ax^2+b=x^2(-x)+3ax^2+b$$
$$y=-x^3+3ax^2+b,\ A(-1,1) \text{ اکسترمم نسبی}$$

مشتق به‌ازای $x=-1$ برابر صفر است.

$$y'=-3x^2+6ax \xrightarrow{x=-1} -3-6a=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

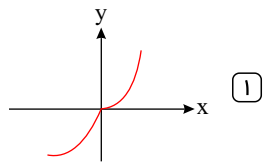
$$y=-x^3-\frac{3}{2}x^2+b$$

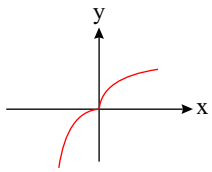
مختصات نقطهٔ $A(-1,1)$ در تابع صدق می‌کند.

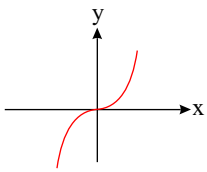
$$۱ = -(-۱)^۳ - \frac{۳}{۲}(-۱)^۲ + b \Rightarrow ۱ = ۱ - \frac{۳}{۲} + b \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

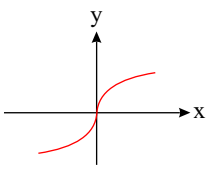
$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}} = -۳$$

۳۴. نمودار تابع وارون تابع $f(x) = \begin{cases} -x^۲ & x \leq ۰ \\ \sqrt{x} & x > ۰ \end{cases}$ کدام است؟

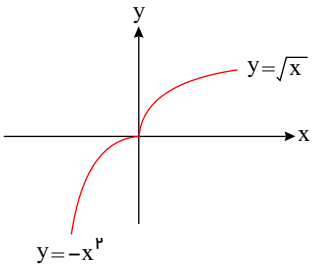
۱) 

۲) 

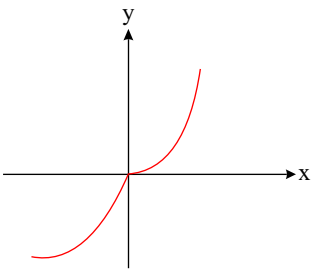
۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



اگر این نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم، نمودار تابع وارون تابع f به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است.



۳۵. دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^۲ + x - ۲$ مفروض‌اند. اگر $g(f(x)) = -۲$ باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\varnothing$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

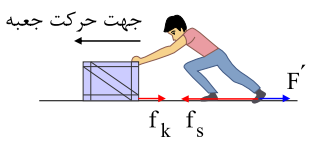
$$f(x) = \begin{cases} -۱ & x \notin \mathbb{Z} \\ ۰ & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) : \begin{cases} x \notin \mathbb{Z}: & g(-۱) = ۱ - ۱ - ۲ = -۲ \\ x \in \mathbb{Z}: & g(۰) = -۲ \end{cases}$$

پس به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

۳۶. شخصی روی سطح افقی، یک صندوق را به سمت غرب هُل می‌دهد. در این عمل، نیروهای اصطکاک وارد به شخص و صندوق، به ترتیب، هر یک به کدام جهت است؟

۱) غرب و شرق ۲) هر دو غرب ۳) شرق و غرب ۴) هر دو شرق

پاسخ: گزینه ۱



نیروی اصطکاک همواره در خلاف جهت حرکت واقعی یا احتمالی جسم به جسم اثر می‌کند. مطابق شکل نیروی f' نیرویی است که از طرف کف کفش شخص به سطح زمین وارد می‌شود. طبق قانون سوم نیوتون عکس‌العمل این نیرو، همان نیروی f_s است که از طرف سطح زمین به پای شخص وارد می‌شود. که جهت آن به طرف غرب خواهد بود. اما به راستی چرا نیروی اصطکاک وارد بر شخص از نوع ایستایی است؟

از طرفی جعبه به سمت غرب حرکت می‌کند. پس نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جعبه در خلاف جهت حرکت آن یعنی در جهت شرق به جعبه وارد می‌شود.

۳۷. در شکل روبه رو، بار اول نخ را به آرامی پایین می‌کشیم و به تدریج این نیرو را افزایش می‌دهیم تا یکی از نخ ها پاره شود، بار دوم همین آزمایش را به این ترتیب تکرار می‌کنیم که نخ را بصورت ضربه ای در یک لحظه به پایین می‌کشیم تا یکی از نخ های دو طرف وزنه پاره شود. در مورد این آزمایش کدام درست است؟

۱) در هر دو آزمایش نخ از قسمت پایین وزنه پاره می‌شود.

۲) در هر دو آزمایش نخ از قسمت بالای وزنه پاره می‌شود.

۳) در آزمایش اول نخ از بالای وزنه پاره می‌شود و در آزمایش دوم از پایین وزنه

۴) در آزمایش اول نخ از پایین وزنه پاره می‌شود و در آزمایش دوم از بالای وزنه

پاسخ: گزینه ۳ در آزمایش اول که نخ را به آرامی می‌کشیم، اثر نیروی وارده بر نخ فرصت انتقال پیدا می‌کند و از قسمت بالای وزنه پاره می‌شود چون نیروی کشش نخ در قسمت بالا بیشتر است. درآزمایش دوم که نخ را به صورت ضربه ای و آنی می‌کشیم ، اثر نیرو فرصت انتقال پیدا نمی‌کند و از قسمت پایین پاره می‌شود.

۳۸. وزنه ای توسط یک نخ از سقف آزمایشگاه آویخته شده است. واکنش نیروی وزن وزنه به ..... وارد می شود و جهت آن نیروی واکنش نیز ..... است.

۱) نخ- رو به پایین ۲) نخ- رو به بالا ۳) کره زمین- از زمین به سمت وزنه ۴) کره زمین- از وزنه به سمت زمین

پاسخ: گزینه ۳ وزن، نیروی گرانشی ای است که زمین به وزنه وارد می کند و واکنش آن به زمین وارد می شود و جهت آن نیرو از زمین به سمت وزنه است.

۳۹. اگر نیروهای وارد بر جسم در حال حرکت، متوازن باشند (برایندشان صفر باشد):

۱) سرعت جسم ثابت می‌ماند.

۲) حرکت جسم با شتاب ثابت تندشونده خواهد بود.

۳) مسیر حرکت جسم ممکن است دایره‌ای یا سهمی باشد.

۴) سرعت جسم در مسیر مستقیم کاهش می‌یابد تا متوقف شود.

پاسخ: گزینه ۱ هنگامی که نیروهای وارد بر یک جسم متوازن هستند طبق قانون دوم نیوتون، شتاب جسم صفر است:

$$\overrightarrow{F_{net}} = m\vec{a} \xrightarrow{\overrightarrow{F_{net}}=\vec{0}} \vec{a} = \vec{0} \rightarrow \vec{v} = \text{ثابت}$$

۴۰. بر جسمی به جرم $5kg$ که روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد سه نیروی $F_1 = 10N, F_2 = 8N, F_3 = 7N$ وارد می شود و برآیند آنها صفر است. اگر فقط اندازه‌ی F_2 و F_3 دو برابر شود گزینه‌ی درست در مورد شتاب جسم کدام است؟

۱) $2\frac{m}{s^2}$ در جهت $\overrightarrow{F_1}$ ۲) $2\frac{m}{s^2}$ در خلاف جهت $\overrightarrow{F_1}$ ۳) کمتر از $2\frac{m}{s^2}$ در خلاف جهت $\overrightarrow{F_1}$ ۴) کمتر از $2\frac{m}{s^2}$ در جهت $\overrightarrow{F_1}$

پاسخ: گزینه ۲ اگر برآیند ۳ نیرو صفر شود، هر نیرو، قرینهٔ برایند دو نیروی دیگر است، یعنی:

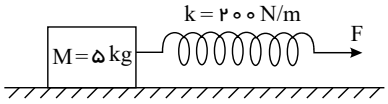
$$F_1 + F_2 + F_3 = 0 \Rightarrow F_2 + F_3 = -F_1$$

اکنون اگر F_2 و F_3 دو برابر شود و جهت $\overrightarrow{F_1}$ را مثبت فرض می‌کنیم، داریم:

$$F_1 + 2F_2 + 2F_3 = ma \Rightarrow F_1 + 2(F_2 + F_3) = ma$$
$$F_1 + 2(-F_1) = ma \Rightarrow -F_1 = ma$$
$$-10 = 5a \Rightarrow a = -2\frac{m}{s^2}$$

شتاب منفی است یعنی در خلاف جهت $\overrightarrow{F_1}$ است.

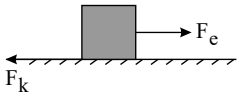
۴۱. جسمی روی یک سطح افقی تحت تأثیر نیروی افقی F با سرعت ثابت کشیده می‌شود. اگر افزایش طول فنر درضمن حرکت ۵ سانتی‌متر باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح کدام است؟ $(g = 10\,m/s^2)$



۱) ۰٫۲ ۲) ۰٫۲۵

۳) ۰٫۳ ۴) ۰٫۴

پاسخ: گزینه ۱



چون سرعت ثابت است، نیروهای وارد بر جسم متوازن‌اند، یعنی نیروی محرک F و نیروی مقاوم اصطحکاک جنبشی هم اندازه‌اند.

$$\vec{v} = \text{ثابت} \rightarrow \vec{a} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_{net} = m\vec{a} = \vec{0}$$

$$F_e - f_k = 0 \rightarrow F_e = f_k$$

$f_k = k\Delta x = \mu_k \times mg$

$\mu_k \times ۵۰ = ۲۰۰ \times \frac{۵}{۱۰۰} \Rightarrow ۵۰\mu_k = ۱۰ \Rightarrow \mu_k = ۰/۲$

۴۲. سه نیرو، هم‌زمان بر وزنه‌ای به جرم $۵kg$ اثر می‌کنند. اگر بردار نیروها در SI به صورت $\vec{F}_۱ = ۲۰\vec{i} - ۵۰\vec{j}$ ، $\vec{F}_۲ = ۱۰\vec{i} + ۲۰\vec{j}$ و $\vec{F}_۳ = -۱۰\vec{j}$ باشند، بزرگی شتاب حاصل از این نیروها چند متر بر مربع ثانیه خواهد شد؟

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) ۱۰ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

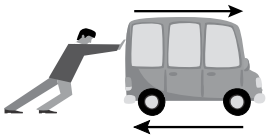
پاسخ: گزینه ۳

باتوجه به قانون دوم نیوتون داریم: $\vec{F}_۱ = ۲۰\vec{i} - ۵۰\vec{j}\ ,\ \vec{F}_۲ = ۱۰\vec{i} + ۲۰\vec{j}\ ,\ \vec{F}_۳ = -۱۰\vec{j}$

$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ = m\vec{a} \Rightarrow (۲۰ + ۱۰)\vec{i} + (-۵۰ + ۲۰ - ۱۰)\vec{j} = ۵\vec{a}$

$۵\vec{a} = ۳۰\vec{i} - ۴۰\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = ۶\vec{i} - ۸\vec{j} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{۶^۲ + (-۸)^۲} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰\frac{m}{s}$

۴۳. در شکل مقابل عکس‌العمل نیرویی که فرد برای هل دادن به ماشین وارد می‌کند و همچنین نیروی اصطکاک چرخ‌ها با زمین به‌ترتیب به کجا وارد می‌شوند؟



۱) فرد - ماشین ۲) فرد - فرد
۳) فرد - زمین ۴) زمین - ماشین

پاسخ: گزینه ۳ فرد ماشین را هل می‌دهد، بنابراین ماشین هم همان نیرو را در خلاف جهت آن‌ها وارد می‌کند (رد گزینهٔ «۴»؛ از طرف دیگر زمین نیروی اصطکاک را به چرخ‌های ماشین وارد می‌کند، بنابراین چرخ‌های ماشین هم همان نیرو را در خلاف جهت به زمین وارد می‌آورند.

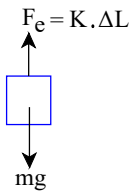
۴۴. فنری را از یک نقطه آویزان کرده و به انتهای آن وزنه ۵۰۰ گرمی می‌آویزیم طول فنر در این حالت ۲۰ سانتی‌متر می‌شود. اگر ۱۰۰ گرم دیگر به وزنه آویخته شده به فنر اضافه کنیم، طول فنر ۲۲ سانتی‌متر می شود طول فنر بدون وزنه چند سانتی‌متر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲ راه حل اول: با توجه به صورت تست، به ازای هر ۱۰۰ گرمی که به جرم وزنه‌ی آویخته شده، اضافه می‌شود،به طول فنر $۲cm$ اضافه می‌گردد. بنابراین به ازای وزنه‌ی ۵۰۰ گرمی که در حالت اول آویخته شده، به طول فنر به اندازه‌ی $۱۰cm$ اضافه شده است.

$\begin{matrix} ۱۰۰g & ۲cm \\ ۵۰۰g & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{۵۰۰ \times ۲}{۱۰۰} = ۱۰cm \Rightarrow$ طول فنر بدون وزنه $= ۲۰ - ۱۰ = ۱۰cm$

راه حل دوم:



$mg = k\Delta L \Rightarrow \frac{m_۱}{m_۲} = \frac{(\Delta L)_۱}{(\Delta L)_۲} \Rightarrow \frac{۵۰۰}{۶۰۰} = \frac{۲۰ - L_۰}{۲۲ - L_۰}$

$\Rightarrow \frac{۵}{۶} = \frac{۲۰ - L_۰}{۲۲ - L_۰} \Rightarrow L_۰ = ۱۰cm$

۴۵. نیروی F به جرم m شتاب a را می دهد اگر $۲۰۰g$ به جرم جسم اضافه شود نیروی F به آن شتاب $\frac{a}{۳}$ می دهد، m چند گرم است؟

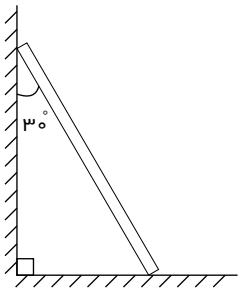
۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ: گزینه ۱ در اینجا نیروی F ثابت است و با تغییر جرم، شتاب نیز تغییر می‌کند. بنابراین داریم:

$\left.\begin{matrix} F = ma \\ F = (m + ۰/۲)\frac{a}{۳} \end{matrix}\right\} \Rightarrow ma = (m + ۰/۲)\frac{a}{۳} \Rightarrow ۳ma = (m + ۰/۲)a$

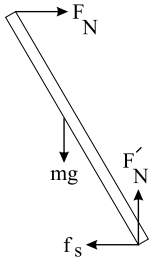
$\Rightarrow ۳m = m + ۰/۲ \Rightarrow m = ۰/۱kg = ۱۰۰g$

۴۶. نردبانی همگن به جرم $۴۰kg$ مطابق شکل زیر، روی دیوار قائمی با اصطکاک ناچیز قرار دارد. اگر نیرویی که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند، $۳۰۰N$ باشد، نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰N/kg)$



۱) ۴۰۰
۲) ۵۰۰
۳) ۶۰۰
۴) $۲۵۰\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ نیروهای وزن و عمودی تکیه‌گاه سطح افقی متوازن هستند. از طرفی نیروهای اصطکاک و عمودی تکیه‌گاه دیوار قائم نیز متوازن هستند.

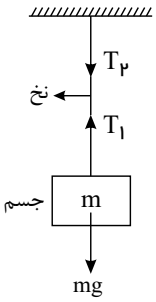


تعادل افقی : $f_s = F_N = ۳۰۰N$

تعادل قائم : $F'_N = mg = ۴۰ \times ۱۰ = ۴۰۰N$

نیروی وارده از طرف سطح افقی به نردبان : $R = \sqrt{f_s^۲ + F_N'^۲} = ۵۰۰N$

۴۷. در شکل مقابل وزنه در حال تعادل است. باتوجه به نیروهای رسم‌شده کدام گزینه درست است؟



۱) نیروی $T_۱$ واکنش نیروی mg است.
۲) عکس‌العمل $T_۲$ به جسم وارد می‌شود.
۳) $T_۲$ عکس‌العمل $T_۱$ است.
۴) واکنش نیروی $T_۱$ به نخ وارد می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

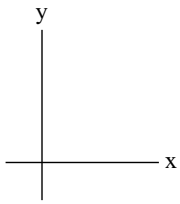
گزینهٔ ۱) واکنش نیروی mg به زمین وارد می‌شود. (غلط)

گزینهٔ ۲) عکس‌العمل $T_۲$ به نخ وارد می‌شود. (غلط)

گزینهٔ ۳) $T_۲$ به سقف و $T_۱$ به جسم وارد می‌شود و ربطی به‌هم ندارند. (غلط)

گزینهٔ ۴) چون $T_۱$ از طرف نخ وارد شده پس واکنش $T_۱$ به نخ وارد می‌شود. (درست)

۴۸. مطابق شکل زیر، شخصی جعبهٔ ساکنی به جرم $۵۰kg$ را با نیروی ثابت و افقی $\vec{F} = (۲۵۰N)\vec{i}$ می‌کشد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جعبه و سطح به‌ترتیب ۰٫۶ و ۰٫۳ باشد، نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، در SI کدام است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

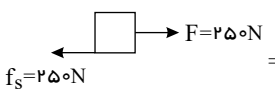


۱) $(-۵۰۰N)\vec{j}$
۲) $(۵۰۰N)\vec{j}$
۳) $(-۲۵۰N)\vec{i} + (۵۰۰N)\vec{j}$
۴) $(۲۵۰N)\vec{i} + (-۵۰۰N)\vec{j}$

پاسخ: گزینه ۴ گام اول: ابتدا ببینیم جسم ساکن است یا خیر! برای این منظور، باید نیروی F محرک را با $(f_s)_{max}$ مقایسه کنیم.

$$\begin{cases} (f_s)_{max} = \mu_s F_N = \frac{۶}{۱۰} \times ۵۰۰ = ۳۰۰N \xrightarrow{F=۲۵۰N<(f_s)_{max}} (\text{جسم ساکن می‌ماند}) \\ F_N = W = mg = ۵۰۰ \end{cases}$$

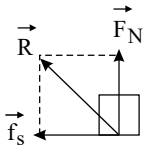
گام دوم: نیروی اصطکاک به دلیل ساکن ماندن جسم برابر خواهد بود:



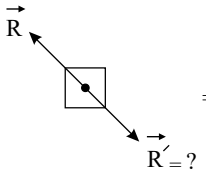
$$\Rightarrow f_s = ۲۵۰N \Rightarrow \vec{f_s} = -۲۵۰\vec{i}$$

گام سوم: نیرویی که سطح تکیه‌گاه به جسم وارد می‌کند برابر است با:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F_N} + \vec{f_s} = -۲۵۰\vec{i} + ۵۰۰\vec{j} \\ F_N = mg = ۵۰۰N \Rightarrow \vec{F_N} = ۵۰۰\vec{j} \end{cases}$$

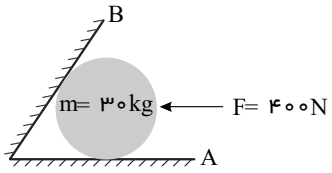


گام چهارم: امّا سؤال نیروی وارده از طرف جسم به سطح را خواسته است:



$$\Rightarrow \vec{R'} = -\vec{R} = ۲۵۰\vec{i} - ۵۰۰\vec{j}$$

۴۹. کرهٔ نشان داده‌شده بین دو سطح صیقلی و صاف در تعادل قرار دارد. برآیند نیرویی که دیوارهٔ A و B بر کره وارد می‌کند چند نیوتون است؟



۱) ۷۰۰
۲) ۵۰۰
۳) ۶۰۰
۴) ۴۰۰

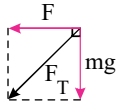
پاسخ: گزینه ۲ نیروهایی که سطوح A و B وارد می‌کنند، $\vec{F}_{N_A}$ و $\vec{F}_{N_B}$ است.

برآیند نیروهایی که به جسم وارد می‌شود، صفر است.

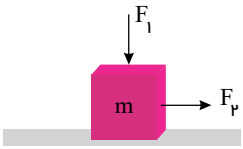
$$\sum F = ۰ \Rightarrow \vec{F}_{N_A} + \vec{F}_{N_B} + \vec{mg} + \vec{F} = ۰ \Rightarrow \vec{F}_{N_A} + \vec{F}_{N_B} = -\vec{mg} - \vec{F}$$

اندازهٔ برآیند $\vec{F}_{N_A} + \vec{F}_{N_B}$ با بزرگی برآیند $\vec{F}$ و mg برابر است.

$$F_T = \sqrt{F^۲ + mg^۲} = \sqrt{۴۰۰^۲ + ۳۰۰^۲} = ۵۰۰N$$



۵۰. جعبهٔ نشان داده شده ساکن است. با افزایش نیروی $F_۱$ کدام گزینه رخ می‌دهد؟



۱) نیروی سطح بر جعبه افزایش می‌یابد.
۲) نیروی اصطکاک بین سطح و جعبه افزایش می‌یابد.
۳) نیروی سطح بر جعبه در راستای قائم ثابت باقی می‌ماند.
۴) برآیند $F_۱$ و mg با نیروی سطح خنثی می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱ جسم ساکن است. در نتیجه:

$$F_۲ = f_s \le f_{s,\max} = \mu_s(F_۱ + mg)$$
$$F_N = F_۱ + mg$$

نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند (R) برابر است با:

$$R = \sqrt{F_N^۲ + f_s^۲} = \sqrt{(F_۱ + mg)^۲ + F_۲^۲}$$

$\uparrow R \Leftarrow \uparrow F_N \Leftarrow \uparrow F_۱ \Leftarrow F_۱$ با افزایش

$= F_۲ = f_s \Leftarrow \uparrow f_{s,\max} \Leftarrow \uparrow F_۱$ ثابت

گزینهٔ ۱ صحیح است. دقت کنید گزینهٔ ۴ غلط است، زیرا نیروی سطح (R) است. اگر نیروی عمودی تکیه‌گاه F_N در گزینه می‌آمد آنگاه گزینهٔ ۴ هم صحیح می‌شد.

۵۱. در واکنش اکسایش آمونیاک در مجاورت پلاتین، طبق معادلهٔ $aNH_۳ + bO_۲ \xrightarrow{Pt} cNO + dH_۲O$، نسبت b به c کدام است؟

۱) ۳ به ۲
۲) ۴ به ۳
۳) ۵ به ۴
۴) ۶ به ۵

پاسخ: گزینه ۳

$$aNH_۳ + bO_۲ \rightarrow cNO + dH_۲O$$

گام اول: آغازگر موازنه، نیتروژن است پس در طرفین واکنش برای ترکیب‌های دارای آن، ضریب ۱ می‌گذاریم:

$$\underline{۱NH_۳} + bO_۲ \rightarrow \underline{۱NO} + dH_۲O$$

گام دوم: اکنون نوبت موازنه هیدروژن در سمت راست است:

$$۱NH_۳ + bO_۲ \rightarrow ۱NO + \frac{۳}{۲}H_۲O$$

برای از بین بردن مخرج کسر، ضرایب همهٔ ترکیبات موازنه شده را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\underline{۲NH_۳} + bO_۲ \rightarrow \underline{۲NO} + \underline{۳H_۲O}$$

گام سوم: در پایان، موازنه اکسیژن را در سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$\underline{۲NH_۳} + \frac{۵}{۲}O_۲ \rightarrow \underline{۲NO} + \underline{۳H_۲O}$$

برای از بین بردن ضریب کسری، کافی است همهٔ ضرایب را در ۲ ضرب کنیم:

$$\underline{۴NH_۳} + \underline{۵O_۲} \rightarrow \underline{۴NO} + \underline{۶H_۲O}$$

۵۲. چند میلی‌گرم سدیم کربنات برای خنثی کردن پنج لیتر محلول اسید قوی با $pH = ۵$ لازم است؟ (واکنش موازنه شود.)

$$(Na = ۲۳, C = ۱۲, O = ۱۶ : g \cdot mol^{-۱})$$

$$Na_۲CO_۳(s) + HA(aq) \rightarrow NaA(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

۱) ۲٫۶۵ ۲) ۴٫۴۵ ۳) ۵٫۳ ۴) ۱۰٫۶

پاسخ: گزینه ۱ واکنش موازنه شده به صورت زیر است:

$$۱Na_۲CO_۳ + ۲HA \rightarrow ۲NaA + ۱CO_۲ + ۱H_۲O$$

غلظت یون H^+ و اسید HA با هم برابر است. بنابراین:

$$[H_۳O^+] = ۱۰^{-pH} \xrightarrow{\text{اسید قوی}} [H_۳O^+] = [HA] \Rightarrow [HA] = ۱۰^{-۵} mol \cdot L^{-۱}$$

حال داریم:

$$۵L \text{ محلول} \times \frac{۱۰^{-۵}\ mol\ HA}{۱L \text{ محلول}} \times \frac{۱mol\ Na_۲CO_۳}{۲mol\ HA} \times \frac{۱۰۶\ g\ Na_۲CO_۳}{۱\ mil\ Na_۲CO_۳} \times \frac{۱۰۰۰mg}{۱g} = ۲٫۶۵mg$$

۵۳. اگر غلظت یون هیدرونیوم در محلولی که از یک نوع اسید (HA) با غلظت ۰٫۰۵ مولار در دمای معین، برابر ۵×۱۰^{-۴} مول بر لیتر باشد، ثابت تعادل یونش این اسید، به‌تقریب کدام است؟

۱) $۲٫۵ \times ۱۰^{-۵}$ ۲) ۵×۱۰^{-۶} ۳) $۲٫۵ \times ۱۰^{-۶}$ ۴) ۵×۱۰^{-۵}

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا باید درجهٔ یونش اسید را به‌دست آوریم.

$$\alpha = \frac{[H^+]}{[HA]} = \frac{۵ \times ۱۰^{-۴}}{۵ \times ۱۰^{-۲}} = ۱۰^{-۲}$$

حال با استفاده از رابطه ثابت یونش و درجه یونش می‌توان نوشت:

$$\alpha < ۰٫۰۵ \Rightarrow K_a = \alpha^۲ \cdot [HA]_{\text{اولیه}} = (۱۰^{-۲})^۲ \times ۵ \times ۱۰^{-۲} = ۵ \times ۱۰^{-۶}$$

۵۴. اگر به حجم معینی از محلول ۰٫۲ مولار سدیم هیدروکسید، همان حجم آب مقطر اضافه شود، pH آن از ..... به ..... می‌رسد که برابر pH محلول ..... مولار آن است.

۱) ۱۳٫۷ – ۱۲٫۷ – ۰٫۰۱ ۲) ۱۳٫۷ – ۱۲٫۷ – ۰٫۱ ۳) ۱۳٫۳ – ۱۲٫۳ – ۰٫۰۱ ۴) ۱۳٫۳ – ۱۳ – ۰٫۱

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا غلظت یون هیدروکسید را محاسبه می‌کنیم:

$$[OH^-] = M \Rightarrow [OH^-] = ۲ \times ۱۰^{-۱} mol \cdot L^{-۱}$$

$$[H_۳O^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۲ \times ۱۰^{-۱}} = ۵ \times ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow pH = -\log(۵ \times ۱۰^{-۱۴}) = -\log ۵ + ۱۴ = -۰٫۷ + ۱۴ = ۱۳٫۳$$

اگر همان حجم آب مقطر اضافه شود، یعنی حجم را دو برابر کرده‌ایم، پس غلظت نصف می‌شود:

$$M_{\text{جدید}} = \frac{[OH^-]}{۲} = \frac{۲ \times ۱۰^{-۱}}{۲} = ۱۰^{-۱} = ۰٫۱ mol \cdot L^{-۱}$$

$$[H_۳O^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۱}} = ۱۰^{-۱۳} \Rightarrow pH = ۱۳$$

۵۵. اگر pH یک محلول برابر ۹ باشد، غلظت مولار یون $OH^-(aq)$ در آن، ..... برابر غلظت مولار یون $H^+(aq)$ است و این محلول کاغذ pH را به رنگ ..... درمی‌آورد. (با تغییر)

۱) $۱۰^{۴}$، آبی ۲) $۱۰^{۴}$، سرخ ۳) $۱۰^{۵}$، آبی ۴) $۱۰^{۵}$، سرخ

پاسخ: گزینه ۱

$$\left.\begin{matrix} pH=۹ \\ pOH=۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow [H^+]=۱۰^{-۹} mol\cdot L^{-۱}, [OH^-]=۱۰^{-۵} mol\cdot L^{-۱} \Rightarrow \frac{[OH^-]}{[H^+]}=\frac{۱۰^{-۵}}{۱۰^{-۹}}=۱۰^{۴}$$

چون $pH>۷$ می‌باشد بنابراین محلول قلیایی است و رنگ کاغذ pH در آن آبی می‌باشد.

۵۶. چند مول $NaOH(s)$ باید به ۱۰ لیتر محلول اسید قوی HA با $pH=۳$ اضافه شود تا کاملاً خنثی شود؟

۱) ۰٫۰۱ ۲) ۰٫۱ ۳) ۰٫۰۵ ۴) ۰٫۵

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا غلظت یون هیدرونیوم را محاسبه می‌کنیم:

$$pH=۳ \rightarrow [H^+]=۱۰^{-۳} mol\cdot L^{-۱}$$

این مقدار برابر غلظت اسید قوی است:

$$HA+NaOH \rightarrow NaOH+H_۲O$$

حال با توجه به معادلهٔ واکنش داریم:

$$۱۰L \text{ محلول} \times \frac{۱۰^{-۳} mpl\ HA}{۱L \text{ محلول}} \times \frac{۱mol\ NaOH}{۱mol\ HA}=۰٫۰۱ mol\ NaOh$$

۵۷. اگر نسبت غلظت مولار یون هیدروکسید به یون هیدرونیوم در یک محلول باز قوی برابر $۱۰^{۱۰}$ باشد، برای خنثی کردن $۱۰۰mL$ از این محلول، چند مول HCl نیاز است؟

۱) $۱۰^{-۲}$ ۲) ۵×۱۰^{-۲} ۳) $۱۰^{-۳}$ ۴) ۵×۱۰^{-۳}

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به رابطهٔ زیر غلظت یون هیدروکسید و محلول باز قوی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{[OH^-]}{[H^+]}=۱۰^{۱۰}$$

$$[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴} \Rightarrow ۱۰^{-۱۰}[OH^-]^۲=۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [OH^-]=۱۰^{-۲}\frac{mol}{L}$$

واکنش انجام شده به صورت $H^+ + OH^- \rightarrow H_۲O$ است:

$$۱۰۰mL\frac{۱L}{۱۰۰۰mL} \times \frac{۰٫۰۱\ mol\ OH^-}{۱L \text{ محلول}} \times \frac{molH^+}{۱molOH^-} \times \frac{۱mol\ HCl}{۱mol\ H^+}=۱۰^{-۳} mol$$

۵۸. کدام مطلب دربارهٔ اسیدها و بازها، همواره درست است؟

۱) در یون هیدرونیوم، همهٔ اتم‌ها به آرایش هشتایی پایدار رسیده‌اند.
۲) قدرت هر اسید با مولاریتهٔ آن نسبت مستقیم دارد.
۳) محلول اسیدها و بازها در آب، رسانای خوبی برای جریان برق‌اند.
۴) هر چه K_a محلول اسیدی در شرایط یکسان، بزرگتر باشد، آن اسید قوی‌تر است.

پاسخ: گزینه ۴ هر چه Ka (ثابت یونش) اسید بزرگ‌تر، قدرت اسیدی آن، بیش‌تر است.

گزینهٔ «۱»: در هیدرونیوم، اتم هیدروژن به آرایش He می‌رسد.

گزینهٔ «۲»: قدرت اسید به غلظت آن بستگی ندارد.

گزینهٔ «۳»: رسانایی محلول اسید و باز به قدرت و غلظت آن‌ها بستگی دارد.

۵۹. با توجه به واکنش‌های زیر چه تعداد از موارد زیر درست‌اند؟

$$I) HSO_۴^-(aq) \rightleftharpoons SO_۴^{۲-}(aq)+H^+(aq) \quad K_a=۱٫۲\times ۱۰^{-۲}$$
$$II) HF(aq) \rightleftharpoons F^-(aq)+H^+(aq) \quad K_a=۶٫۸\times ۱۰^{-۴}$$

آ) در شرایط یکسان، غلظت $SO_۴^{۲-}(aq)$ بیش‌تر از غلظت $F^-(aq)$ است.

ب) در محلول تعادلی هیدروفلوئوریک‌اسید واکنش ترکیب‌شدن یون‌های $F^-(aq)$ با $H^+(aq)$ سریع‌تر از واکنش یونش $HF(aq)$ انجام می‌شود.

پ) میزان رسانایی الکتریکی محلول یک‌مولار $HSO_۴^-$ بیش‌تر از میزان رسانایی الکتریکی محلول یک مولار HF است.

ت) در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، غلظت یون $H^+(aq)$ در محلول HF کم‌تر از محلول $HSO_۴^-$ است.

ث) در شرایط یکسان درجهٔ یونش $HSO_۴^-(aq)$ بیش‌تر از درجهٔ یونش $HF(aq)$ است.

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ اکنون به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

آ) درست است. هرچه K_a بزرگ‌تر باشد به معنای آن است که اسید موردنظر به میزان بیش‌تری یونش یافته و غلظت یون‌های آن بیش‌تر است. یعنی:

$K_a(HSO_4^-) > K_a(HF) \xrightarrow{\text{در شرایط یکسان}} [SO_4^{2-}] > [F^-]$

ب) نادرست است. محلول اسیدهای ضعیف (مانند $HF(aq)$) نمونه‌ای از سامانهٔ تعادلی هستند که در آن سرعت واکنش رفت (یونش $HF(aq)$) با سرعت واکنش برگشت (ترکیب شدن $F^-(aq)$ با $H^+(aq)$) برابر است.

پ) درست است. $HSO_4^-(aq)$ اسید قوی‌تری از $HF(aq)$ است زیرا K_a آن بزرگ‌تر است. در نتیجه بیش‌تر یونیده شده و غلظت یون‌های تولیدشدهٔ آن بیش‌تر است، به همین دلیل محلول آن رسانایی الکتریکی بیش‌تری دارد:

K_a بزرگ‌تر ⇐ اسید قوی‌تر ⇐ یونش بیش‌تر ⇐ غلظت یون‌های تولیدشده بیش‌تر ⇐ رسانایی الکتریکی بیش‌تر

ت) درست است. $HF(aq)$ اسید ضعیف‌تری است، لذا کم‌تر یونش یافته و $H^+(aq)$ کم‌تری تولید می‌کند.

ث) درست است. HSO_4^- اسید قوی‌تری است؛ یعنی بیش‌تر یونیده می‌شود و درجهٔ یونش (α) آن بیش‌تر است.

۶۰. در صورتی که بدانیم نام یون‌های O_2^{2-} و N_3^- و C_2^{2-} و Hg_2^{2+} به‌ترتیب پراکسید، آزید، کاربید و جیوه (I) است، چه تعداد از نام‌گذاری‌های زیر درست است؟

۱) CO_2 کربن‌پراکسید
۲) ZnO روی (II) اکسید
۳) Na_2C_2 سدیم کاربید
۴) CuN_3 مس (I) آزید
۵) CrC_2 کروم (II) کاربید
۶) Hg_2S جیوه (I) سولفید
۷) BaO_2 باریم اکسید
۸) K_2O_2 پتاسیم پراکسید
۹) Hg_2Cl_2 جیوه (I) کلرید
۱۰) $Fe(N_3)_3$ آهن (III) آزید

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲ در بخش (۱) با نام‌گذاری ترکیب‌های یونی آشنا شدیم. اکنون از باب یادآوری نحوهٔ نام‌گذاری و فرمول‌نویسی، ترکیب‌های مورد نظر را بررسی می‌نماییم.

۱) $CO_2 \Rightarrow$ کربن‌دی‌اکسید $\Rightarrow$ یک ترکیب مولکولی است نه یونی! CO_2

۲) $ZnO \Rightarrow$ روی اکسید $\Rightarrow$ روی فقط یک نوع کاتیون (Zn^{2+}) تشکیل می‌دهد، لذا به کاربردن عدد رومی برای آن درست نیست

۳) سدیم کاربید $\begin{Bmatrix} 2Na^+ \\ C_2^{2-} \end{Bmatrix} \Rightarrow Na_2C_2$

۴) مس (I) آزید $\begin{Bmatrix} Cu^+ \\ N_3^- \end{Bmatrix} \Rightarrow CuN_3$

۵) کروم (II) کاربید $\begin{Bmatrix} Cr^{2+} \\ C_2^{2-} \end{Bmatrix} \Rightarrow CrC_2$

۶) جیوه (I) سولفید $\begin{Bmatrix} Hg_2^{2+} \\ S^{2-} \end{Bmatrix} \Rightarrow Hg_2S$

۷) BaO_2 $\begin{Bmatrix} Ba^{2+} & \text{باریم} \\ O_2^{2-} & \text{پراکسید} \end{Bmatrix} \Rightarrow$ باریم پراکسید

۸) پتاسیم پراکسید $\begin{Bmatrix} 2K^+ \\ O_2^{2-} \end{Bmatrix} \Rightarrow K_2O_2$

۹) جیوه (I) کلرید $\begin{Bmatrix} Hg_2^{2+} \\ 2Cl^- \end{Bmatrix} \Rightarrow Hg_2Cl_2$

۱۰) آهن (III) آزید $\begin{Bmatrix} Fe^{3+} \\ 3N_3^- \end{Bmatrix} \Rightarrow Fe(N_3)_3$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود از ده ترکیب مورد نظر، فقط نام ZnO, CO_2 و BaO_2 درست ذکر نشده بود.

۶۱. در کدام ردیف از ردیف‌های جدول زیر، نام شیمیایی ترکیب‌ها درست نوشته شده است؟

۱	Na_3N, NO_2, CuO	مس (I) اکسید، نیتروژن دی‌اکسید، سدیم‌نیترید
۲	$CaSO_4, CS_2, Li_2CO_3$	لیتیم کربنات، کربن دی‌سولفید، کلسیم سولفات
۳	MnO, CrF_2, PCl_5	فسفر پنتا کلرید، کروم دی فلوئورید، منگنز (II) اکسید
۴	$COCl_2, BaI_2, SiO_2$	سیلسیم دی‌اکسید، باریم یدید، کربونیل کلرید

۱) ۳، ۱ ۲) ۴، ۱ ۳) ۳، ۲ ۴) ۴، ۲

پاسخ: گزینه ۴ موارد نادرست ذکر شده به قرار زیر هستند:

ردیف ۱)

$CuO =$ مس (II) اکسید

ردیف ۳)

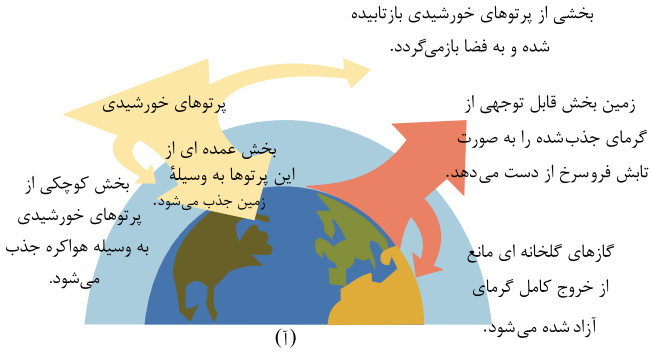
$CrF_2 =$ کروم (II) فلوئورید، $MnO_2 =$ منگنز (IV) اکسید

۶۲. وقتی پرتوهای خورشیدی به سمت زمین می‌تابند، چه تعداد از موارد زیر رخ می‌دهد؟

- **بخش عمده‌ای از این پرتوها به‌وسیلهٔ زمین جذب می‌شوند.**
- **بخش کوچکی از پرتوهای خورشیدی به وسیلهٔ هواکره جذب می‌شود.**
- **بخشی از پرتوهای خورشیدی در اثر برخورد با هواکره، بازتابیده شده و به فضا برمی‌گردد.**
- **زمین بخش قابل توجهی از گرمای جذب‌شده را به صورت تابش فروسرخ از دست می‌دهد.**
- **گازهای گلخانه‌ای مانع از خروج کامل گرمای آزادشده می‌شوند و بخشی از این گرما را به سطح زمین بازمی‌گردانند.**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، همهٔ مطالب ارائه‌شده، درست هستند.



(آ)

۶۳. فرمول شیمیایی مس (I) اکسید، مشابه فرمول شیمیایی کدام اکسید است و نسبت جرم اکسیژن به جرم مس در آن، کدام است؟ $(O=16, Cu=64 : g\cdot mol^{-1})$

۱) Ag_2O، ۰٫۱۲۵ ۲) FeO، ۰٫۱۲۵ ۳) Ag_2O، ۰٫۲۵ ۴) FeO، ۰٫۲۵

پاسخ: گزینه ۱ فرمول شیمیایی مس (I) اکسید به‌صورت Cu_2O است که مشابه Ag_2O است.

$$\frac{\text{جرم } O}{\text{جرم } Cu}=\frac{1\times 16}{2\times 64}=0/125$$

۶۴. اگر در دمای اتاق، به ۱۲۵ میلی‌لیتر آب مقطر، ۰٫۷ گرم پتاسیم هیدروکسید اضافه شود، چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ محلول حاصل، درست است؟ $(H=1 \ , \ O=16 \ , \ K=39 : g\cdot mol^{-1})$، از تغییر حجم محلول بر اثر اضافه کردن مادهٔ جامد به آن، چشم پوشی شود.)

- **۲۵۰ میلی‌لیتر از آن، $2/5\times 10^{-2}$ مول HCl را به‌طور کامل خنثی می‌کند.**
- **غلظت مولار یون $OH^-(aq)$ در آن، 10^{12} برابر غلظت مولار یون $H^+(aq)$ است.**
- **در ۵۰ میلی‌لیتر از این محلول، در مجموع، ۰٫۰۱ مول از کاتیون و آنیون وجود دارد.**
- **اگر به این محلول، ۱٫۴ گرم پتاسیم هیدروکسید دیگر اضافه شود، $[OH^-]$، ۳ برابر خواهد شد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴ همهٔ عبارت‌های داده شده درست هستند.

مورد اول: در ۲۵۰ میلی‌لیتر از محلول پتاسیم هیدروکسید، $2\times 0/7=1/4$ گرم KOH (معادل با $\frac{1/4}{56}=0/025$ مول) وجود دارد. هر مول KOH، یک مول HCl را خنثی می‌کند.

مورد دوم:

$$[OH^-]=[KOH]=\frac{\frac{0/7g}{56g\cdot mol^{-1}}}{0/125L}=0/1mol\cdot L^{-1}$$

$$[H^+][OH^-]=10^{-14}\Rightarrow [H^+]=10^{-13}\Rightarrow \frac{[OH^-]}{[H^+]}=\frac{10^{-1}}{10^{-13}}=10^{12}$$

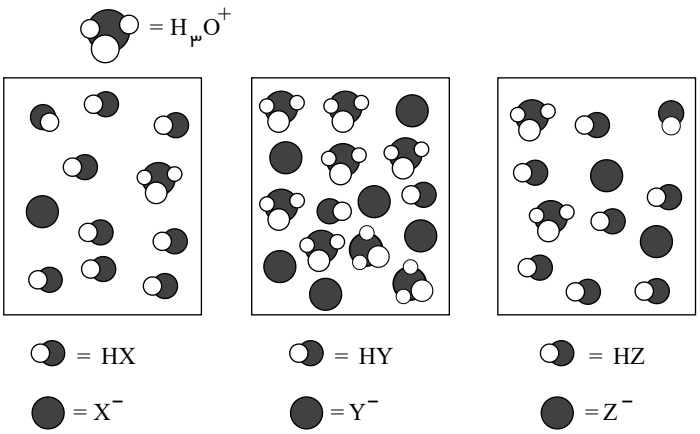
مورد سوم:

	KOH	$\rightarrow$	K^+	$+$	OH^-
غلظت مولی :	۰٫۱		۰٫۱		۰٫۱

$[\text{یون‌ها}] = ۰٫۲\frac{mol}{L} \xrightarrow{\times ۰٫۰۵L}$ مول یون‌ها $= ۰٫۰۱mol$

مورد چهارم: با اضافه کردن ۱٫۴ گرم پتاسیم هیدروکسید دیگر، جرم و مول KOH سه برابر شده و درنتیجه غلظت مولی محلول و OH^- هم سه خواهد شد.

۶۵. در شکل زیر، محلول اسیدها HX، HY و HZ، با غلظت مولی و دمای یکسان، نشان داده شده است و برای سادگی مولکول‌های آب حذف شده است، چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ آن‌ها درست است؟



- در میان اسیدها، HX ضعیف‌ترین اسید است.
- واکنش یونش هر سه اسید در آب، تعادلی است.
- قدرت اسیدی اتانوئیک اسید، به یقین از HY کوچک‌تر است.
- ثابت یونش HZ، از ثابت یونش HX بزرگتر و از ثابت یونش HY، کوچکتر است.
- اگر HX، هیدروسیانیک اسید باشد، HZ می‌تواند هیدروفلوئوریک اسید باشد.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ تمامی عبارت‌های ذکر شده درست هستند.

مورد اول: HX، ضعیف‌ترین اسید است زیرا کمتر از دو اسید دیگر یونش یافته است.

مورد دوم: هیچکدام از اسیدها به‌طور کامل یونیده نشده‌اند پس واکنش یونش هر ۳ تعادلی است.

مورد سوم: اسید HY به‌طور عمده یونیده شده در حالی که میزان یونش استیک اسید بسیار کم است.

مورد چهارم: با توجه به میزان یونش اسیدها می‌توان نوشت:

قدرت اسیدی: $HY > HZ > HX$

مورد پنجم: هیدروسیانیک اسید، اسید ضعیف‌تری از هیدروفلوئوریک اسید است.

آیین علوی